Trigonometrische Funktionen

Kurvendiskussion ohne Verwendung der Differenzialrechnung

Trainingsaufgaben

Geeignet für die Klassenstufen 9 und 10.

Die gezeigten Methoden werden zum Abitur vorausgesetzt!

Datei 16150

Stand: 25. Januar 2014

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Hinweise

In diesen Aufgaben werden Sinus- und Kosinuskurven dahingehend untersucht, dass man analysiert, durch welche Abbildungen sie aus den Kurven y = sin x bzw. y = cos x hervor gehen.
Dies wird in zwei Texten ausführlich erklärt.
Im Text 21100 wird gezeigt, dass es zu Verschiebungen, Spiegelungen und Streckungen so genannte Abbildungsgleichungen gibt. Mit ihrer Hilfe kann man die Gleichung einer abgebildeten Kurve berechnen. Damit versteht man dann auch, wie man umgekehrt der Kurvengleichung entnehmen kann, welche Abbildungen sie in diese Lage gebracht haben.
Dasselbe passiert auf etwas andere Art in den ersten Seiten des Textes 16140, der sich mit der Untersuchung von trigonometrischen Funktionen befasst.

Inhalt

Teil 1:	Kurven, nicht in x-Richtung gestreckt	3
Teil 2:	Kurven, in x-Richtung gestreckt und nicht verschoben	4
Teil 3:	Kurven, in x-Richtung gestreckt und verschoben	5
Teil 4:	Sinus-Kurven, beliebig gestreckt und verschoben	6
Teil 5:	Kosinus-Kurven, beliebig gestreckt und verschoben	8
Teil 6:	Kurvengleichungen aufstellen	10
Lösungen		12-39

Teil 1: Kurven, nicht in x-Richtung gestreckt

Aufgabe 110

Zeichne die Schaubilder der Kurven $y = 2 \cdot \sin x$ und $y = \cos x + 2$
in ein gemeinsames Achsenkreuz für mindestens $0 \geq x \geq 2\pi$.
(Maßstab für die x-Achse: π bei 3 cm.)

Berechne ihre Schnittpunkte für $D = R$.

Aufgabe 111 $f(x) = 2\cos(x - \pi)$

Durch welche Abbildungen entsteht das Schaubild K von f aus y = cos x?
Zeichne die Kosinuskurve, die gestreckte Kurve und schließlich K im Intervall $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

Verwende auf der x-Achse einen Maßstab mit der Längeneinheit $\frac{3}{\pi}$cm,
d.h. π *wird bei 3 cm eingetragen.*

Aufgabe 112

Zeichne die Kurve $y = \sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{1}{2}$ mit Längeneinheit $\frac{3}{\pi}$ im Intervall $[-\pi; 2\pi]$. Gib für dieselbe Kurve eine Gleichung mit Kosinus an.

Welche Nullstellen, Hoch, Tief- und Wendepunkte hat die Funktion im maximalen Definitionsbereich R ?

Aufgabe 113

Zeichne das Schaubild der Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin(x + \frac{1}{4}\pi) + 2$ im Intervall $[-\pi; 3\pi]$.

Verwende auf der x-Achse einen Maßstab mit der Längeneinheit $\frac{3}{\pi}$cm,
d.h. π *wird bei 3 cm eingetragen.*

Beschreibe, durch welche Abbildungen die Kurve aus y = sin x entsteht.
Gib eine Gleichung für diese Kurve an, welche die Kosinusfunktion verwendet.
Berechne die Nullstellen dieser Funktion für das Intervall $[-\pi; 3\pi]$ mit einer geeigneten Gleichung.

Teil 2: Kurven, in x-Richtung gestreckt und nicht verschoben

Aufgabe 211 $f(x) = \sin\left(\frac{2}{3}x\right)$

Ermittle die Abbildung, mit der das Schaubild K aus f aus y = sin x entstanden ist. Berechne die Periodenlänge und die Lage der Nullstellen, Maxima und Minima (aus denen der Sinuskurve).
Zeichne das Schaubild für $-\pi \le x \le 4\pi$.

Verwende auf der x-Achse einen Maßstab mit der Längeneinheit $\frac{3}{\pi}$cm,
d.h. π *wird bei 3 cm eingetragen.*

Aufgabe 221 $f(x) = -3\sin\frac{x}{2} + 2$

Zeichne das Schaubild für $0 \le x \le 4\pi$ in ein Achsenkreuz. Beschreibe die Entstehung der Kurvenpunkte aus den Winkeln 30°, 60°, 90° usw.
Berechne die Nullstellen.

Verwende auf der x-Achse einen Maßstab mit der Längeneinheit $\frac{3}{\pi}$cm,
d.h. π *wird bei 3 cm eingetragen.*

Aufgabe 251

Zeichne die Kurve $y = 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}\right)$ für $0 \le x \le 14$ mit Längeneinheit 1 cm.

Wie groß ist das Periodenintervall?

Teil 3: Kurven, in x-Richtung gestreckt und verschoben

Aufgabe 312

Zeichne die Kurve mit der Gleichung $y = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ im Bereich $-2\pi \le x \le 2\pi$.
Gib die Abbildungen an, die diese Kurve aus $y = \cos x$ entstehen lassen.

Verwende auf der x-Achse einen Maßstab mit der Längeneinheit $\frac{3}{\pi}$cm,
d.h. π *wird bei 3 cm eingetragen.*

Aufgabe 331

$y = 4 \cdot \sin\left(\frac{x}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right)$

Zeichne diese Kurve im Intervall $[-8\,;8]$. (Längeneinheit 1 cm).
Bestimme ihre Periode sowie die Abbildungen, welche sie aus $y = \sin x$ entstehen lässt.

Teil 4: Sinus-Kurven, beliebig gestreckt und verschoben

Aufgabe 411 $f(x) = \sin(2x - 2) - 1$

Durch welche Streckung mit nachfolgender Verschiebung ist das Schaubild K von f aus y = sin x entstanden? Zeichne alle drei Kurven in ein Achsenkreuz und berechne die Nullstellen von f.

Verwende auf der x-Achse einen Maßstab mit der Längeneinheit $\frac{3}{\pi}$ cm,
d.h. π *wird bei 3 cm eingetragen.*

Aufgabe 412

Zeichne die Kurve mit der Gleichung $y = 2 \cdot \sin(2x) - 1$ im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$.

Verwende auf der x-Achse einen Maßstab mit der Längeneinheit $\frac{3}{\pi}$ cm,
d.h. π *wird bei 3 cm eingetragen.*

Aufgabe 413 $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

Durch welche Streckung mit nachfolgender Verschiebung ist das Schaubild K von f aus y = sin x entstanden.

Zeichne alle drei Kurven in ein Achsenkreuz für $-\frac{1}{2}\pi \le x \le \frac{9}{2}\pi$.
Verwende auf der x-Achse einen Maßstab mit der Längeneinheit $\frac{3}{\pi}$ cm,
d.h. π *wird bei 3 cm eingetragen.*

Berechne die Nullstellen von f.

Aufgabe 414

Zeichne das Schaubild der Funktion f mit

$$f(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - 2 \quad \text{für} \quad D = [-\pi; 4\pi].$$

(Maßstab für die x-Achse: π bei 3 cm.)

Beschreibe, durch welche Folge von Abbildungen dieses Schaubild aus der Kurve y = sin x entsteht.

Stelle die Gleichung dieser Funktion auch durch die Kosinusfunktion dar.

Aufgabe 415

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = -3\sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right) + 2$.

a) Zeichne ihr Schaubild in ein Achsenkreuz für $-\pi \le x \le 4\pi$.

b) Lies die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte ab.

c) **<u>Berechne</u>** die Nullstellen der Funktion.

d) Gib eine weitere Gleichungen für f mit Kosinus an.

Aufgabe 416

Untersuchung der Kurve: $y = -5 \cdot \sin(2x - \pi) - 1$ für $-\pi \leq x \leq 3\pi$.

Bestimme eine Folge von Abbildungen, welche diese Kurve aus $y = -\sin x$ entstehen lässt.

Zeichne die Kurve.

Lies die Extrempunkte ab und berechne die Nullstellen.

Gib eine Gleichung der Kurve mit Kosinus an.

Aufgabe 421

$f(x) = 4\sin(\frac{2}{3}\pi \cdot x) - 2$ für $[0;6]$

Zeichne das Schaubild und gib die zugrunde liegenden Abbildungen an. Verwende 1 cm als Längeneinheit.

Gib die Länge der Periode sowie die Lage der Hoch- und Tiefpunkte an und ***berechne*** die Nullstellen von f in **D**.

Teil 5: Kosinus-Kurven, beliebig gestreckt und verschoben

Aufgabe 521

$f(x) = -2\cos\left(\frac{2}{5}x - \frac{\pi}{5}\right) + 2$

Zeichne das Schaubild für $-\pi \le x \le 4\pi$.
Berechne die Nullstellen.

Aufgabe 522

Untersuchung der Kurve:

$$y = 2 \cdot \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}\pi\right) + 2 \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 3\pi$$

Bestimme eine Folge von Abbildungen, welche dies Kurve aus y = cos x entstehen lässt. Zeichne die Kurve.

Lies die Extrempunkte ab und berechne die Nullstellen.

Gib eine Gleichung der Kurve mit Sinus an.

Aufgabe 523

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\pi\right) + 1$ für $-\pi \le x \le 2\pi$.

a) Beschreibe, welche Abbildung notwendig sind, um das Schaubild von f aus y = cos x zu erzeugen.

Zeichne die Kurve in ein Achsenkreuz.

b) Welche Periode hat die Kurve?

Berechne die Nullstellen der Funktion.

c) Gib eine Gleichung der Kurve als Sinuskurve an.

d) Zeichne ins gleiche Schaubild noch die Kurve mit der Gleichung:

$$y = -\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$$

Aufgabe 524

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\pi\right) + 1$ für $-2\pi \le x \le 2\pi$

Beschreibe, welche Abbildung notwendig sind, um das Schaubild von f aus y = cos x zu erzeugen.
Zeichne die Kurve in ein Achsenkreuz.

Welche Periode hat die Kurve?
Berechne die Nullstellen der Funktion.

Gib eine Gleichung der Kurve als Sinuskurve an!

Aufgabe 531

$f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \pi\right) + 2$ für $0 \le x \le 2\pi$.

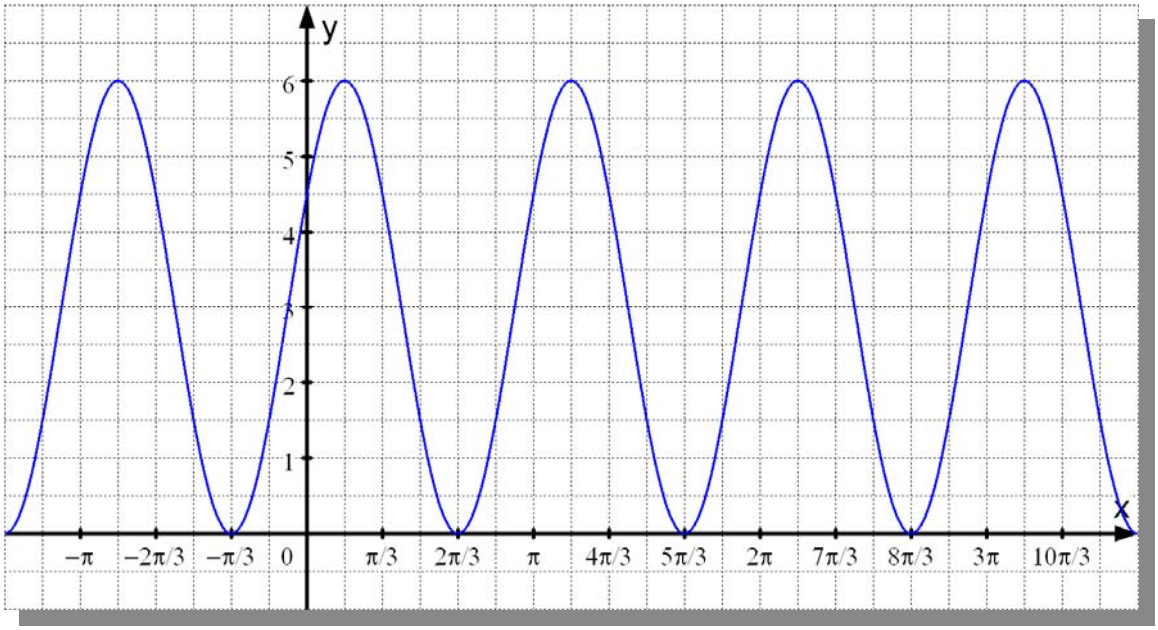
Zeichne das Schaubild so: Verschiebe zuerst das Achsenkreuz, so dass nur noch die gestreckte Kosinuskurve einzuzeichnen ist. Ermittle dazu die Periodenlänge, trage ins Hilfsachsenkreuz die wichtigen Kosinus-Kurven-Punkte ein und verbinde diese dann.

Verwende auf der x-Achse einen Maßstab mit der Längeneinheit $\frac{3}{\pi}$cm*,*
d.h. π *wird bei 3 cm eingetragen.*

Teil 6: Kurvengleichungen aufstellen

Aufgabe 611

Stelle eine Gleichung für die Funktion f auf, deren Schaubild abgebildet ist:

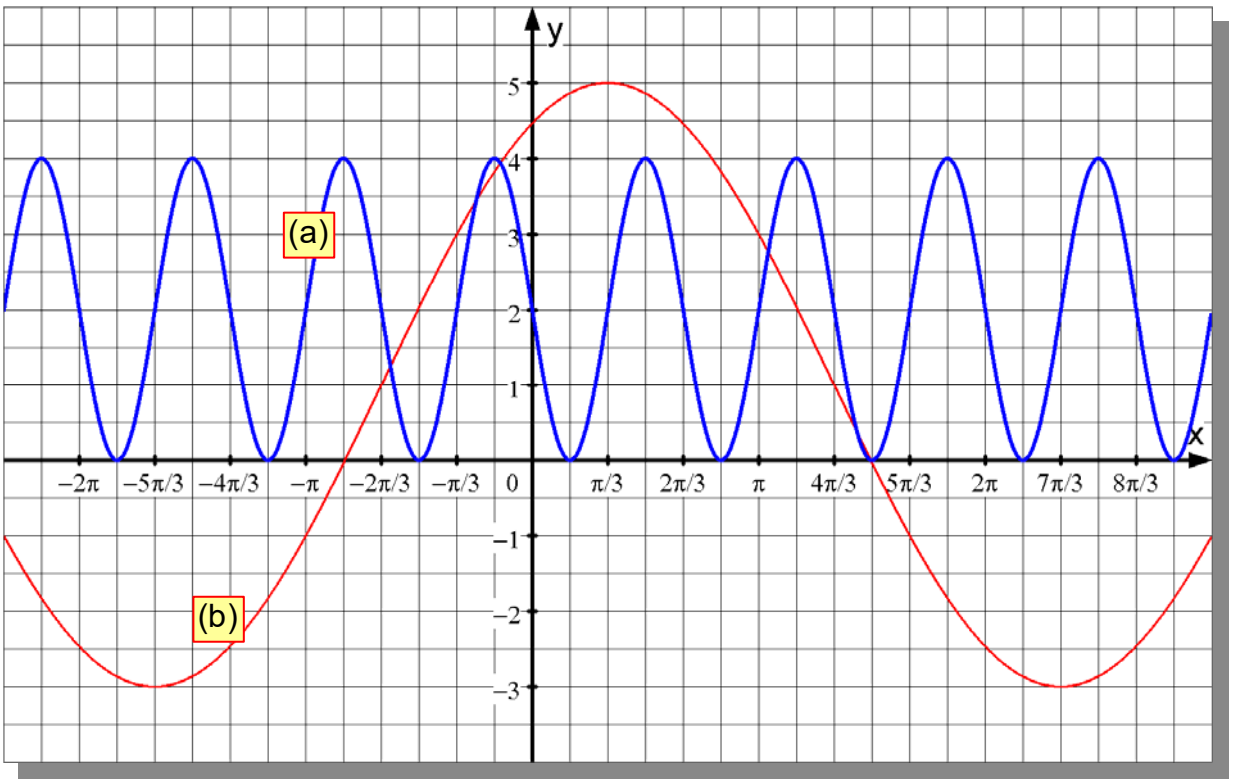


Aufgabe 612

Welche Gleichungen haben die folgenden beiden Kurven?

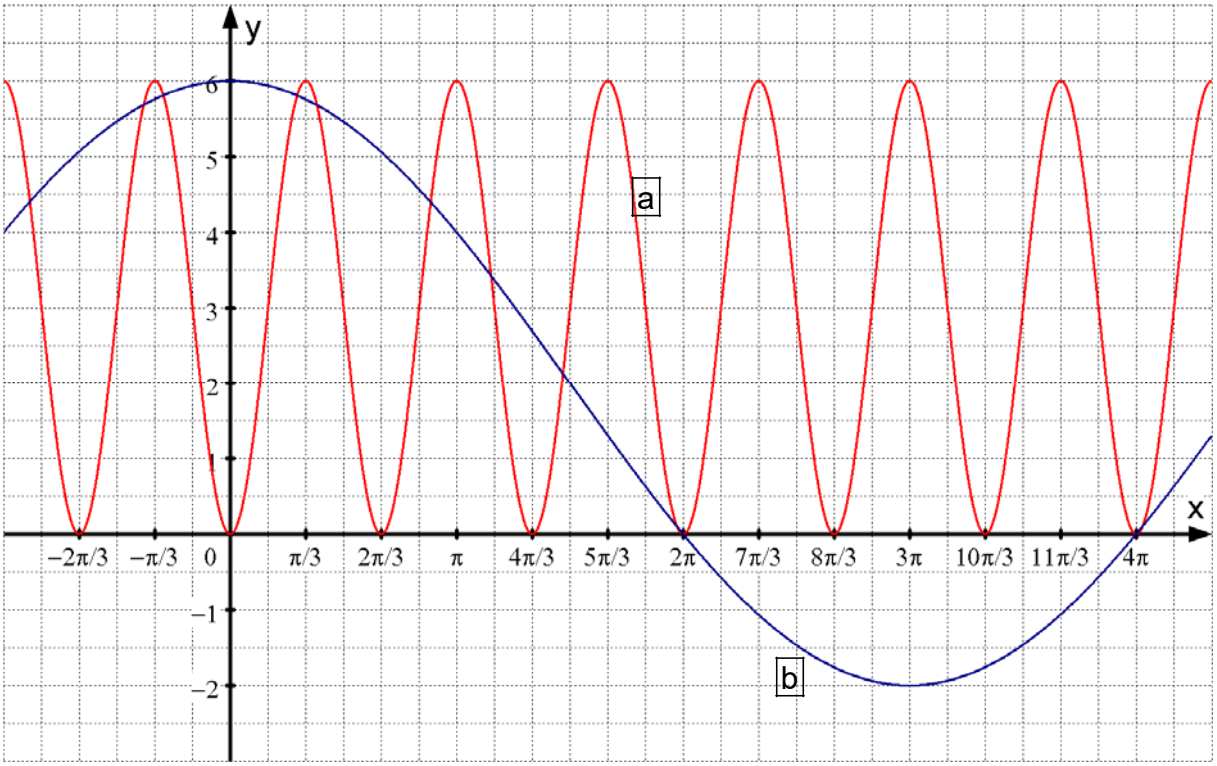
Gib die Gleichung von a) mit sin und die von b) mit cos an.

Findest du noch andere Lösungen?



Aufgabe 613

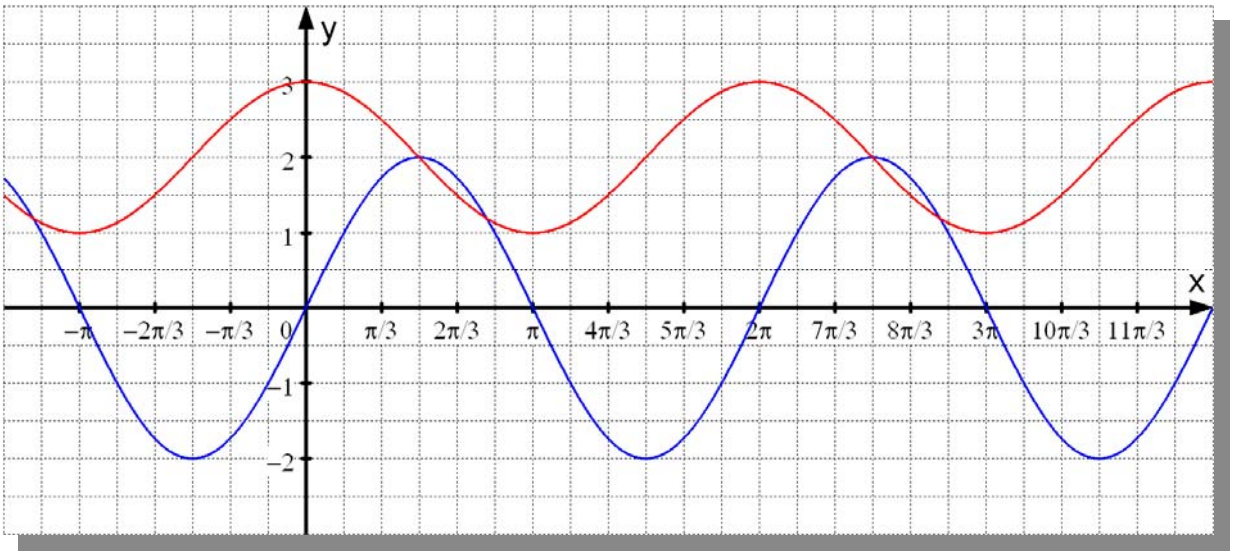
Gib je Kurve eine Gleichung mit Sinus und eine mit Kosinus an. Bestimme dazu zuerst die Periode usw.



Lösungsteil

Lösung 110

Zeichne die Schaubilder der Kurven $y = 2 \cdot \sin x$ und $y = \cos x + 2$
in ein gemeinsames Achsenkreuz für mindestens $0 \geq x \geq 2\pi$. (x-Achse: π bei 3 cm.)
Berechne ihre Schnittpunkte für $D = R$.



Berechnung der Schnittpunkte durch Gleichsetzen:

$$2 \cdot \sin x = \cos x + 2 \qquad \text{mit} \qquad D = R \quad !!$$

$$2 \cdot \sin x - 2 = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} \qquad | \text{ quadrieren}$$

$$4 \cdot \sin^2 x - 8 \cdot \sin x + 4 = 1 - \sin^2 x$$

$$5 \cdot \sin^2 x - 8 \cdot \sin x + 3 = 0$$

$$\sin x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{10} = \frac{8 \pm 2}{10} = \begin{cases} 1 \\ 0{,}6 \end{cases}$$

Aus $\sin x = 1$ folgt $x_1 = \frac{1}{2}\pi$.

Aus $\sin x = 0{,}6$ folgt $x_2 = 0{,}6435$ und $x_3 = \pi - x_2 = 2{,}498$.

Probe für x_1: $LS = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot 1 = 2$

$RS = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + 2 = 0 + 2 = 2$ Wahre Aussage.

Probe für x_2: $LS = 2 \cdot \sin 0{,}6435 = 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2$

$RS = \cos 0{,}6435 + 2 = 0{,}8 + 2 = 2{,}8$ Falsche Aussage.

Probe für x_3: $LS = 2 \cdot \sin 2{,}498 = 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2$

$RS = \cos 2{,}498 + 2 = -0{,}8 + 2 = 1{,}2$ Wahre Aussage.

(Die Probe musste gemacht werden, weil die Gleichung quadriert worden ist)

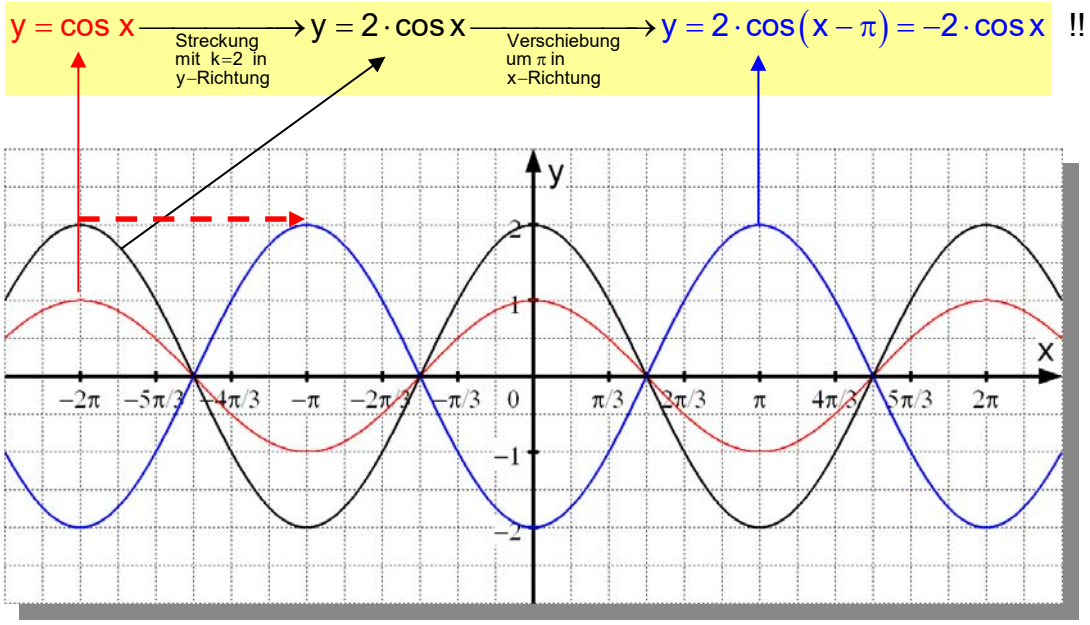
y-Koordinaten: $y_1 = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2$ und $y_2 = 2 \cdot \sin(2{,}498) = 1{,}2$

Ergebnis: $S_1\left(\frac{1}{2}\pi + z \cdot 2\pi | 2\right)$, $S_2\left(2{,}498 + z \cdot 2\pi | 1{,}2\right)$, für $z \in Z$.

Lösung 111

$$f(x) = 2\cos(x - \pi)$$

Durch welche Abbildungen entsteht das Schaubild K von f aus y = cos x?
Zeichne die Kosinuskurve, die gestreckte Kurve und schließlich K.



Der dicke gestrichelte rote Pfeil zeigt die Verschiebung an.

Beobachtung: Spiegelt man die „schwarze“ Kurve $y = 2 \cdot \cos x$ an der x-Achse, entsteht dasselbe Endergebnis, als wenn man diese Kurve um die Strecke π nach rechts (oder links) verschiebt.

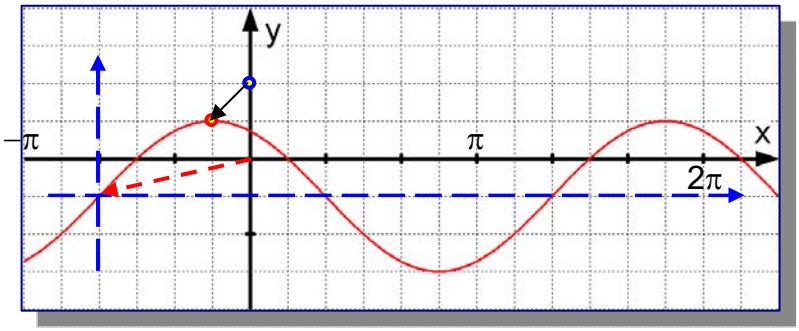
Lösung 112

Zeichne die Kurve $y = \sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{1}{2}$ mit Längeneinheit $\frac{3}{\pi}$ im Intervall $[-\pi\,;\,2\pi]$.
Gib für dieselbe Kurve eine Gleichung mit Kosinus an.

Welche Nullstellen, Hoch, Tief- und Wendepunkte hat die Funktion im maximalen Definitionsbereich R ?

Die Kurve y = sin x wurde um $\frac{2}{3}$ nach links und um $\frac{1}{2}$ nach unten verschoben (Pfeil !).

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\pi \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



Eine Streckung liegt nicht vor.

Darstellung als Kosinuskurve:

Wir denken uns den Hochpunkt $H(0\,|\,1)$ durch den kleinen Pfeil verschoben, ergibt eine Verschiebung um $\frac{1}{6}\pi$ nach links und um $\frac{1}{2}$ nach unten. Daher hätte diese Kurve als Kosinuskurve z. B. diese Gleichung:

$$y = \cos\left(x + \tfrac{1}{6}\pi\right) - \tfrac{1}{2}$$

Nullstellen: $x_N = -\frac{1}{2}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{1}{2}\pi(4z - 1) \quad , \quad z \in \mathbf{Z}$

und $x_N = \frac{1}{6}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{1}{6}\pi(12z + 1) \quad , \quad z \in \mathbf{Z}$

Hochpunkte: $H\left(-\frac{1}{6}\pi + z \cdot 2\pi \,|\, \frac{1}{2}\right)$

Tiefpunkte: $T\left(\frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi \,|\, -\frac{3}{2}\right)$

Wendepunkte: $W\left(\frac{1}{3}\pi + z\pi \,|\, -\frac{1}{2}\right)$

Hinweis:

Wer die Kurve **als Sinuskurve** dargestellt hat, könnte diese Gleichung gefunden haben:

$$y = \sin\left(x + \tfrac{2}{3}\pi\right) - \tfrac{1}{2}$$

Oder diese: $y = -\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) - \frac{1}{2}$